

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Сахалинский государственный университет»

Кафедра геологии и нефтегазового дела

УТВЕРЖДЕН
на заседании кафедры
«27» мая 2025 г., протокол № 9
Заведующий кафедрой
 / Денисова Я.В.

ФОНД
ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ
Б1.О.07 Методы математической физики
(наименование дисциплины (модуля))

Направление подготовки
21.03.01 Нефтегазовое дело
(код и наименование направления подготовки)

Наименование профиля
«Управление разработкой нефтегазовых месторождений»
(наименование направленности (профиля) образовательной программы)

Уровень высшего образования
МАГИСТР

Южно-Сахалинск, 2025

Формируемые компетенции и индикаторы их достижения по дисциплине

Коды компетенции	Содержание компетенций	Код и наименование индикатора достижения компетенции
УК-1	Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1: анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие, осуществляет декомпозицию задачи. УК-1.2: находит и критически анализирует информацию, необходимую для решения поставленной задачи. УК-1.3: рассматривает возможные варианты решения задачи, оценивая их достоинства и недостатки.

Примеры тестовых заданий

Задание закрытого типа на установление соответствия

1. Соотнесите

Уравнение в частных производных		Порядок уравнения
А. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} + 2z - x$		1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.
Б. $\frac{\partial z}{\partial x} + 2 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial^2 t} - xt = 4$		
В. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2zy = ze^{2x}$		
Г. $\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 4 \frac{\partial z}{\partial x} + xy = \sin 2x$		

Заполните таблицу

А	Б	В	Г

Ответ:

А	Б	В	Г
1	3	2	4

2. Соотнесите

Постановка задачи математической физики Рассматривается уравнение $P(x, y, z, u) \frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y, z, u) \frac{\partial u}{\partial y} + R(x, y, z, u) \frac{\partial u}{\partial z} = T(x, y, z, u)$ Для решения задаются дополнительные условия		Название условий
А. Задание функции $u(x, y, z, t)$ в каждой точке границы в начальный момент времени.		1) Условия Коши; 2) Условия Дирихле; 3) условия Неймана
Б. Задается нормальная компонента градиента искомой функции $(\nabla u)_n$ в каждой точке границы		

В. Задание функции $u(x, y, z, t)$ и проекции градиента этой функции на нормаль в каждой точке границы в начальный момент времени.		
--	--	--

Заполните таблицу

А	Б	В

Ответ:

А	Б	В
2	3	1

3. Соотнесите названия задач математической физики с их определениями.

Постановка задачи математической физики	название
А. Найти решение уравнения: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, t \in (0; +\infty), x \in (-\infty; +\infty),$ $u(x, 0) = u_{t=0} = f(x), x \in (-\infty; +\infty),$ $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big _{t=0} = F(x), x \in (-\infty; +\infty).$	1) Задача Коши для однородного волнового уравнения на отрезке; 2) Задача Коши для однородного волнового уравнения на прямой; 3) Первая смешанная задача для уравнения теплопроводности на отрезке.
Б. Найти решение уравнения: $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < L, t > 0,$ при нулевых граничных условиях $u(0, t) = u(L, t) = 0$ и начальном условии $u(x, 0) = u_{t=0} = f(x)$.	
В. Найти решение уравнения: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, t \in (0; +\infty), x \in (0; L),$ $u(x, 0) = u_{t=0} = f(x), \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big _{t=0} = F(x),$ $u(0, t) = u_{x=0} = 0, \quad u(L, t) = u_{x=L} = 0.$	

Заполните таблицу

А	Б	В

Ответ:

А	Б	В
3	2	1

4. Соотнесите постановку задачи с методом решения

Задача	Решение
А) задача о колебаниях струны, закреплённой на концах.	1) формула Даламбера

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $u(0, t) = u(l, t) = 0$ $u(x, 0) = u _{t=0} = f(x),$ $u_t(x, t) _{t=0} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big _{t=0} = F(x),$ $0 < x < l$	$u(x, t) = \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(z) dz;$ 2) Метод Фурье $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$ $A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx,$ $B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$ 3) Метод Фурье $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n^2 a^2 \pi^2 t}{l^2}} \sin \frac{n\pi x}{l},$ $C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$
Б) Задача Коши для волнового уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $u(x, 0) = u _{t=0} = f(x),$ $u_t(x, t) _{t=0} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big _{t=0} = F(x)$	
В) Первая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности на отрезке. $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$ $u(x, 0) = \varphi(x)$ $u(0, t) = 0 \quad u(l, t) = 0.$	

Заполните таблицу

А	Б	В

Ответ:

А	Б	В
2	1	3

5. Общий вид уравнения второго порядка имеет вид

$$A(x, y)u_{xx} + 2B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y)$$

Соотнесите тип уравнения с указанными зависимостями.

Тип уравнения	Аналитическая зависимость
А) Параболическое;	1) $B^2 - AC < 0$
Б) Гиперболическое;	2) $B^2 - AC = 0$;
В) Эллиптическое.	3) $B^2 - AC > 0$.

Заполните таблицу:

А	Б	В

Ответ:

А	Б	В
2	3	1

6. Соотнесите метод решения задачи с названием.

Формула	Название
А) Рассматривается начально-краевая задача для волнового уравнения $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t, x) \\ u(t, x) _{t=0} = \varphi_0(x) \\ u_t(t, x) _{t=0} = \varphi_1(x) \\ u(t, x) _{x=0} = \psi_0(x) \\ u(t, x) _{x=l} = \psi_1(x) \end{cases}$ Решение ищем в полу полосе $t \geq 0, 0 \leq x \leq l$ $t^n = n \cdot \tau, x_k = k \cdot h, u_k^h = u(t^n, x_k), K \cdot h = 1$ $\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} = a^2 \frac{u_{k+1}^{n+1} - 2u_k^{n+1} + u_{k-1}^{n+1}}{h^2}, k = 1, 2, \dots, K-1$ Порядок аппроксимации $O(\tau, h^2)$;	1) Явная разностная схема; 2) Неявная разностная схема; 3) Решение с помощью степенных рядов.
Б) Рассматривается начально-краевая задача для волнового уравнения $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t, x) \\ u(t, x) _{t=0} = \varphi_0(x) \\ u_t(t, x) _{t=0} = \varphi_1(x) \\ u(t, x) _{x=0} = \psi_0(x) \\ u(t, x) _{x=l} = \psi_1(x) \end{cases}$ Решение ищем в полу полосе $t \geq 0, 0 \leq x \leq l$ $\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} = a^2 \frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{h^2}, k = 1, 2, \dots, K-1, K = \frac{1}{h}$ $t^n = n \cdot \tau, x_k = k \cdot h, u_k^h = u(t^n, x_k), K \cdot h = 1$ $u_k^0 = \varphi(x_k), u_0^{n+1} = u_K^{n+1} = 0$ Порядок аппроксимации $O(\tau, h^2)$; $t^n = n \cdot \tau, x_k = k \cdot h, u_k^h = u(t^n, x_k), K \cdot h = 1$ $\frac{a^2 \tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}.$	
В) Задача Коши для волнового уравнения	

$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t, x) \\ u(t, x) _{t=0} = \varphi(x) \\ u(t, x) _{t=0} = \psi(x) \end{cases}$ $u(t, x) \approx \sum_{k=0}^K u_k(x) \frac{t^k}{k!}$ $u_0(x) = \varphi(x), u_1(x) = \psi(x)$		
---	--	--

Заполните таблицу:

А	Б	В

Ответ:

А	Б	В
2	1	3

Задание закрытого типа на установление последовательности

7. Решение задачи математической физики включает следующую последовательность этапов:

- А) выбор способа решения;
- Б) установление начальных и граничных условий;
- В) применение выбранного метода для решения уравнения;
- Г) определение типа уравнения;
- Д) анализ полученного решения.

Расположите эти этапы в правильной последовательности

Ответ: ГБАВД

8. Разложение функции $y = f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье на интервале $(-l; l)$ состоит из следующих этапов:

- А) вычислить коэффициенты a_0, a_n, b_n

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx, b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx;$$

- В) проверить выполняется ли равенство $\int_{-l}^l f^2(x) dx < \infty$ (если функция $f(x)$ ограничена на интервале $(-l; l)$, то условие всегда выполняется);

- С) подставить найденные коэффициенты в

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \text{ и записать ответ.}$$

Расположите эти этапы в правильной последовательности

Ответ: ВАС

9. С помощью метода Фурье решение задачи о колебаниях струны, закреплённой на концах:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при граничных условиях

$$u(0, t) = u(l, t) = 0$$

и начальных условиях

$$u(x, 0) = u|_{t=0} = f(x), u_t(x, t)|_{t=0} = \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x), 0 < x < l$$

состоит из следующих шагов:

А) подставляя в исходное уравнение, получаем

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0,$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0;$$

Б) Используя $X(0) = X(l) = 0$ находим собственные числа λ и собственные функции;

В) Решение представляем в виде $u(x, t) = X(x)T(t)$;

Г) При $-\lambda < 0$,

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}, k = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

$$T_k(t) = a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \sqrt{\lambda} x \frac{k\pi at}{l}, k = 0, 1, 2, 3, \dots;$$

Д) Для $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}$ находим

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \quad b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l F(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

Расположите перечисленные выше этапы в порядке выполнения

Ответ: ВАБГД

10. Общая схема вывода уравнения теплопроводности для однородного стержня, теплоизолированного с боков для краевой задачи

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}$$

$$u(x, 0) = f(x),$$

$$u(0, t) = u_1,$$

$$u(l, t) = u_2$$

$$u(0, t) = u_1, \quad u(l, t) = u_2,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in (0, l)$$

А) Согласно закону теплопроводности Фурье в случае нелинейного распределения температуры вдоль стержня количество тепла $Q(x)$, прошедшего за время dt через перпендикулярное оси Ox сечение площади S равно

$$dQ(x) = -\lambda \frac{\partial u}{\partial x} S dt.$$

Постоянная λ зависит от физических свойств материала стержня и называется **коэффициентом теплопроводности**;

Б) Применим закон сохранения энергии - **первое начало термодинамики**: Количество теплоты, пришедшее в некоторый объем за какой-то промежуток времени, идет на изменение внутренней энергии объема и на совершение им работы. Математическая запись примет вид $dQ = c\rho S du dx$,

dQ - количество теплоты, ρ - плотность, Sdx - объем, c - удельная теплоемкость, du - частный дифференциал температуры $u(x, t)$.

В) Введем систему координат: начало совмещаем с одним из концов стержня, ось Ox направим по его оси в сторону другого конца, ось температур Ou направим перпендикулярно оси Ox . Стержень будет в выбранной системе координат совпадать с отрезком $(0, l)$ оси Ox



Предположим $u(x, 0) = f(x)$, $x \in (0, l)$.

Пусть при начале отсчета, т.е. $t=0$, это условие нарушилось, а концы стержня $x=0$, $x=l$ соединили с термостатом с температурами $u_1 > u_2$, соответственно;

Г) Будем предполагать, что границы поддерживаются при постоянной температуре $u(0, t) = u_1$, $u(l, t) = u_2$.

Подсчитаем величину dQ . За время dt через левое сечение $x=x$ в объем Sdx стержня, расположенный между сечениями $x=x$ и $x=x+dx$, протечет количество тепла, равное по закону Фурье

$$dQ_1 = -\lambda \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} S dt.$$

За тот же промежуток времени через правое сечение из рассматриваемого объема вытечет количество тепла, равное

$$dQ_2 = -\lambda \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial x} S dt.$$

Тогда количество тепла равно разности

$$dQ = dQ_1 - dQ_2.$$

Д) Получаем

$$\lambda \left(\frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) S dt = \rho c S dx du.$$

Разделяя обе части равенства на $\rho c S dx dt$ и используя определение производной, получаем искомое уравнение

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}$$

Коэффициент a называется **коэффициентом температуропроводности**.

Расположите эти этапы в правильной последовательности

Ответ: ВАБГД

11. Рассматривается начально-краевая задача для волнового уравнения

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t, x) \\ u(t, x)|_{t=0} = \varphi_0(x) \\ u_t(t, x)|_{t=0} = \varphi_1(x) \\ u(t, x)|_{x=0} = \psi_0(x) \\ u(t, x)|_{x=l} = \psi_1(x) \end{cases}$$

Решение ищем в полу полосе

$$t \geq 0, 0 \leq x \leq l.$$

Выберите порядок действий при решении разностным методом

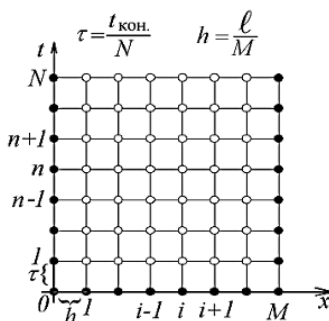
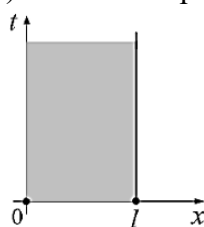
А) Используя начальные условия, получаем $u_k^0 = \varphi(x_k)$, $u_0^{n+1} = u_K^{n+1} = 0$;

Б) Заменяем частные производные в уравнении

$$\begin{aligned} u_t|_{(t_n, x_i)} &\approx \frac{u(t_n + \tau, x_i) - u(t_n, x_i)}{\tau} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau}; \\ u_{tt}|_{(t_n, x_i)} &\approx \frac{\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} - \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\tau}}{\tau} = \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\tau^2}; \\ u_x|_{(t_n, x_i)} &\approx \frac{u(t_n, x_i + h) - u(t_n, x_i)}{h} = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h}; \\ u_{xx}|_{(t_n, x_i)} &\approx \frac{\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} - \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h}}{h} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}. \end{aligned}$$

Уравнение принимает вид $\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = a^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}, i = 1, 2, \dots, M-1, M = \frac{1}{h}$;

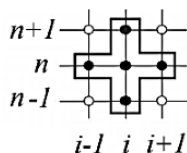
В) Решение строим в прямоугольнике



$$t^n = n \cdot \tau, x_i = i \cdot h, u_i^n = u(t^n, x_i)$$

Д) Получаем разностную схему вычисления значений искомой функции

$$u_i^{n+1} = \frac{a^2 \tau^2}{h^2} u_{i+1}^n + 2 \left(1 - \frac{a^2 \tau^2}{h^2} \right) u_i^n + \frac{a^2 \tau^2}{h^2} u_{i-1}^n - u_i^{n-1},$$



Порядок аппроксимации $0(\tau, h^2)$.

Для устойчивости необходимо выполнение неравенства $\tau \leq \frac{h}{a}$.

Расположите эти этапы в правильной последовательности

Ответ: ВАБД

12. Определение типа уравнения

$$A(x, y)U_{xx} + 2B(x, y)U_{xy} + C(x, y)U_{yy} + a(x, y)U_x + b(x, y)U_y + c(x, y)U = f(x, y)$$

и приведение его к каноническому виду:

А) Пересчитать все производные, входящие в исходное уравнение, используя правило дифференцирования сложной функции:

$$U(\xi(x, y), \eta(x, y))$$

$$U_x = U_\xi \cdot \xi_x + U_\eta \cdot \eta_x,$$

$$U_y = U_\xi \cdot \xi_y + U_\eta \cdot \eta_y,$$

$$U_{xx} = U_{\xi\xi} \cdot (\xi_x)^2 + 2U_{\xi\eta} \cdot \xi_x \eta_x + U_{\eta\eta} \cdot (\eta_x)^2 + U_\xi \cdot \xi_{xx} + U_\eta \cdot \eta_{xx},$$

$$U_{yy} = U_{\xi\xi} \cdot (\xi_y)^2 + 2U_{\xi\eta} \cdot \xi_y \eta_y + U_{\eta\eta} \cdot (\eta_y)^2 + U_\xi \cdot \xi_{yy} + U_\eta \cdot \eta_{yy},$$

$$U_{xy} = U_{\xi\xi} \cdot \xi_x \xi_y + U_{\xi\eta} \cdot (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + U_{\eta\eta} \cdot \eta_x \eta_y + U_\xi \cdot \xi_{xy} + U_\eta \cdot \eta_{xy};$$

Б) Определить коэффициенты $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$;

Вычислить выражение $B^2 - AC$, определить тип уравнения;

В) Вводим новые (характеристические) переменные ξ и η :

в случае уравнения гиперболического типа

$$\xi = \varphi_1(x, y),$$

$$\eta = \psi_1(x, y);$$

в случае уравнения параболического типа

$$\xi = \varphi_2(x, y),$$

$$\eta = \psi_2(x, y) \text{ не выражается через } \xi = \varphi_2(x, y);$$

в случае уравнения эллиптического типа:

$$\xi = \operatorname{Re}(\varphi_3(x, y) + i\psi_3(x, y)) = \varphi_3(x, y),$$

$$\eta = \operatorname{Im}(\varphi_3(x, y) + i\psi_3(x, y)) = \psi_3(x, y).$$

Г) Записываем уравнение характеристик:

$$A(x, y)dy^2 - 2B(x, y)dxdy + C(x, y)dx^2 = 0;$$

Решить уравнение. Для этого:

а) разрешить уравнение как квадратное уравнение относительно dy :

$$dy = \frac{B(x, y) \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A(x, y)} dx;$$

б) найти общие интегралы уравнений:

$$\varphi_1(x, y) = C_1,$$

$$\psi_1(x, y) = C_2,$$

в случае уравнения гиперболического типа;

$$\varphi_2(x, y) = C,$$

в случае уравнения параболического типа;

$$\varphi_3(x, y) \pm i\psi_3(x, y) = C,$$

в случае уравнения эллиптического типа.

Д) Подставить найденные производные в исходное уравнение привести подобные слагаемые. В результате уравнение примет один из следующих видов:

в случае уравнения гиперболического типа:

$$U_{\xi\eta} + F_1(U_\xi, U_\eta, U, \xi, \eta) = 0;$$

в случае уравнения параболического типа:

$$U_{\eta\eta} + F_1(U_\xi, U_\eta, U, \xi, \eta) = 0;$$

в случае уравнения эллиптического типа:

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + F_1(U_\xi, U_\eta, U, \xi, \eta) = 0.$$

Расположите эти этапы в правильной последовательности

Ответ: БГВАД

Задание открытого типа с развернутым ответом/ задача

13. Для решения задач математической физики используются различные методы. Приведите не менее трех.

Ответ:

1) _____

2) _____

Элементы правильного ответа:

- Метод Фурье;
- Метод Даламбера
- Метод сеток
- Применение степенных рядов.

14. Найти решение задачи Коши для линейного уравнения с частными производными первого по-

$$\text{рядка } \cos y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \cos x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad z(0, y) = \sin^2 y$$

Ответ:

Правильный ответ: $z(x, y) = (\sin x - \sin y)^2$

Решение: Составим систему уравнений характеристик:

$$\frac{dx}{\cos y} = \frac{dy}{\cos x} = \frac{dz}{0} \Rightarrow dz = 0 \Rightarrow z = \text{const} = C_1 = \varphi_1(x, y, z),$$

где $z = \text{const} = C_1 = \varphi_1(x, y, z)$ – первый интеграл системы.

Из уравнения $\frac{dx}{\cos y} = \frac{dy}{\cos x} \Rightarrow \cos x dx = \cos y dy$, интегрируя получим

$$\int \cos x dx = \int \cos y dy \Rightarrow \sin x = \sin y + C \Rightarrow \text{второй общий интеграл:}$$

$$\sin x - \sin y = C_2 = \varphi_2(x, y, z).$$

Общий интеграл исходного уравнения будет:

$$\Phi = (\varphi_1(x, y, z), \varphi_2(x, y, z)) = 0, \text{ или } \Phi = (z, \sin x - \sin y) = 0, \text{ или } z = f(\sin x - \sin y),$$

где f – произвольная дифференцируемая функция.

Найдем частное решение, удовлетворяющее условию: $z(0, y) = \sin^2 y$.

$$z(0, y) = f(\sin 0 - \sin y) = f(-\sin y) = \sin^2 y, \text{ делаем замену}$$

$$-\sin y = t \Rightarrow \sin^2 y = t^2 \Rightarrow f(t) = t^2, \text{ получаем функцию } f(t) \Rightarrow \text{искомое частное}$$

$$\text{решение: } z = f(\sin x - \sin y) = (\sin x - \sin y)^2.$$

$$\text{Ответ: } z(x, y) = (\sin x - \sin y)^2$$

15. Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду

$$u_{xx} - 4u_{xy} - 21u_{yy} + 2u_x - 3u_y + 5u = x^2$$

Ответ:

Правильный ответ

$$u_{\xi\eta} - 0,11u_{\xi} + 0,09u_{\eta} - 0,05u = -\frac{(\xi - \eta)^2}{10000}, \quad \xi = y + 7x, \quad \eta = y - 3x.$$

16. Найти решение задачи Коши для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u|_{t=0} = \cos\left(\frac{2x}{3}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 2 \sin\left(\frac{2x}{3}\right).$$

Ответ:

Правильный ответ:

$$u(x, t) = \cos\left(\frac{2(x - 3t)}{3}\right)$$

17. Найти общий интеграл для уравнения

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Ответ:

Правильный ответ:

Общий интеграл уравнения определяется равенством

$$\Phi\left(\frac{y}{x}, u\right) = 0.$$

18. Какие процессы можно описать уравнениями математической физики? Укажите не менее трех вариантов.

Ответ: _____

Правильный ответ:

- Процессы колебания;
- Температурные процессы;
- Процессы диффузии.

Задание открытого типа с кратким ответом/ вставить термин, словосочетание, дополнить предложение

19. Всякая задача математической физики является моделью какого -либо физического процесса. Поэтому естественными требованиями на постановку задачи являются:

- существование решения, разрешимость задачи
- возможность существования только одного решения, единственность задачи
- при малом изменении данных задачи решение при всех значениях аргументов также должно меняться мало, непрерывная зависимость от данных задачи.

Задача математической физики, относительно которой можно доказать выполнение всех трех вышеперечисленных свойств, называется _____ поставленной.

(Вставьте пропущенное слово)

Ответ: корректно.

20. В процессе решения задачи

$$u_{xx} = u_{tt},$$

$$u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0,$$

$$u|_{t=0} = x, u_t|_{t=0} = x^2$$

методом разделения переменных приходим к задаче _____ с условиями $X'(0) = 0 = X(0)$.

(Вставьте пропущенное слово)

Ответ: Штурма-Лиувилля.

21. Метод разделения переменных лежит в основе метода _____.

(Вставьте пропущенное слово)

Ответ: Фурье

22. Уравнение теплопроводности относится к _____ уравнениям.

(Вставьте пропущенное слово)

Ответ: параболическим

23.

_____ решения задачи Коши для уравнения колебания струны выводится с помощью применения принципа суперпозиции решений.

(Вставьте пропущенное слово)

Ответ: Формула д'Аламбера

24. Уравнение вида: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ или $\Delta u = 0$ - называется уравнением _____. Оно описывает стационарный процесс с установившимся распределением температуры сплошной среды. Описывает любые установившиеся процессы. При наличии источников тепла получаем уравнение: $\Delta u = f(p)$ – уравнение _____.

(Вставьте пропущенное слово)

Ответ: Лапласа, Пуассона

Задание комбинированного типа с выбором одного/нескольких правильного ответа из предложенных

25. Условия, которые задают поведение искомой функции в заданный момент времени во всех точках области изменения пространственных переменных, называются условиями

a	b
Граничными	Начальными
c	d
Коши-Римана	Первого рода

Ответ: _____

Ответ: b Начальными

26. Собственные функции, полученные методом разделения переменных решения краевых задач математической физики, являются функциями

a	b
гармоническими	однородными
c	d
фундаментальными	специальными

Ответ: _____

Ответ: а. гармоническими.

27. Метод решения уравнений математической физики, использующий дискретизацию всех независимых переменных:

a	b
метод Фурье разделения переменных	метод моментов
c	d
метод прямых	метод конечных разностей

Ответ: d) метод конечных разностей.

28. В методе сеток значение $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}$ можно аппроксимировать разностным отношением

a	b
$\frac{u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y))}{h^2}$	$\frac{u^2(x+h, y) - u^2(x-h, y))}{h^2}$
c	d
$\frac{u(x, y+h) - 2u(x, y) + u(x, y-h))}{h^2}$	$\frac{u(x, y+h) - (x, y-h))}{2h}$

Ответ: с.

29. Решить уравнение теплопроводности и найти $u(\frac{1}{3}, 4)$: $u'_t = a^2 u''_{xx}$,
 $x \in [0; l], u(0, t) = u(l, t) = 0, u(x, 0) = 2 \sin \frac{3\pi x}{l}, l = 2, a = 1$

a	b
$e^{-6\pi^2}$	$e^{-9\pi^2}$
c	d

$6e^{-3\pi^2}$	$2e^{-9\pi^2}$
----------------	----------------

Ответ: d) $2e^{-9\pi^2}$

30. Разложить функцию $f(x) = x + 1$ в ряд Фурье на интервале $(-2; 2)$

a	b
$x + 1 = 1 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$	$x + 1 = 1 + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{4}x\right)$
c	d
$x + 1 = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$	$x + 1 = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{4}x\right)$

Ответ: c) $x + 1 = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$

Разложить функцию $y = f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье на интервале $(-l; l)$.

Если выполняется условие:

$$\int_{-l}^l f^2(x) dx < \infty,$$

то разложение функции $y = f(x)$ в ряд Фурье на интервале $(-l; l)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),$$

где $a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx$, $a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx$, $b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx$.